

TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKATEADUSKOND
ARVUTITEADUSE INSTITUUT
TEOREETILISE INFORMATIKA ÕPPETOOL
informaatika eriala

KUUPGRAAFID JA NENDE ÜLDISTUSED
TIPPUDEL TRANSITIIVSETE
PERMUTATSIOONIGRAAFIDENA

Magistritöö

JAN WILLEMSON

Juhendaja: dots U. Kaljulaid

Autor:.....”” mai 1998

Juhendaja:.....”” mai 1998

Õppetooli juhataja:.....”” mai 1998

Tartu, 1998

Sisukord

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Sissejuhatus | 2 |
| 2 | Põhimõisted ja definitsioonid | 3 |
| 2.1 | Ülddefinitsioonid | 3 |
| 2.2 | Kauguste loendaja | 4 |
| 3 | Permutatsioonigraafid | 8 |
| 3.1 | Permutatsioonigraafi mõiste | 8 |
| 3.2 | Permutatsioonigraafide konstruktsioonist ja automorfismidest . | 9 |
| 3.3 | Permutatsioonikorrutis | 13 |
| 4 | Graafid Q_n | 16 |
| 5 | Graafid $Q_{m,n}$ | 24 |
| 6 | Graafid Q_n^M | 29 |
| 6.1 | Definitsioon ja omadused | 29 |
| 6.2 | Graafid $Q_{m,n}^M$ | 34 |
| 6.3 | Rakendused | 35 |

1 Sissejuhatus

Kaasaegses arvutiteaduses on tähtsal kohal võrkude (*networks*) uurimine ning tähtsaimaks vahendiks selles vallas on kahtlemata graafiteooria. Graafide keeles võib võrkudele esitada mitmesuguseid nõudmisi, näiteks

- väike valents,
- väike diameeter,
- suur sidusus,
- laiendatavus heade omaduste säilimisega
- jne.

Loomulikult pole kõiki neid tingimusi võimalik üheaegselt rahuldada, kuid kompromissi saab leida ning ühe lahenduse väljapakkumisele ja analüüsile on pühendatud käesoleva väitekirja autori bakalaureusetöö [3]. Mainitud töö lähtekohaks sai tähelepanek, et võrreldes standardse graafiteoreetilise konstruktsiooni – graafide otsekorrutisega – annab graafi diameetrile parema hinnangu permutatsioonigraafi konstruktsioon. Kui nõuda lisaks graafi transitiivsust tippudel, on võimalik kindlustada minimaalse tipuvalentsi ja sidususe vahel mõistlik vahekord, andes muuhulgas võimalusi võrgu laiendamiseks selle vahekorra säilimisega. Samas töös näidati ka, et saavutatav diameetrivõit võib olla kuitahes hea, kuid praktilisi näiteid esitati vaid üksikuid.

Käesolev väitekiri ongi suunatud ühe tuntud graafidepere (kuupgraafide) uurimisele permutatsioonigraafi konstruktsiooni valguses. Töö 2. ja 3. peatükis käsitletakse peale teemaga otseselt seotud mõistete veel kaht kaht abimõistet – kauguste loendajat ning permutatsioonkorrutist. Olles ülejäänule käesolevas küll vaid toeks, omavad nad samas ka iseseisvat teoreetilist tähtsust. Töö järgnevad peatükid sisaldavad juba puhtalt kuupgraafide (ning nende üldistuste) süstemaatilist analüüsi, viies viimases peatükis välja graafide $Q_{m,n}^M$ definitsioonini ja eelnevas esitatu kokkuvõtmiseni selle abil.

Töö on sisuliselt ning suures osas ka vormiliselt valminud autori visiidi ajal Turu Ülikooli 1997. aasta sügisel.

2 Põhimõisted ja definitsioonid

2.1 Ülddefinitsioonid

Käesoleva töö parema mõistetavuse huvides toome alul ära mõned standard-
sed mõisted.

Definitsioon 2.1 Lihtgraafiks nimetame paari (V, E) , kus V on lõplik mit-
tetühi hulk (lihtgraafi tipuhulk, mille elemente nimetame lihtgraafi tippu-
deks) ning $E \subseteq \{P \mid P \subseteq V, |P| = 2\}$ (lihtgraafi servahulk, selle hulga ele-
mente nimetame lihtgraafi servadeks).

Kuna edaspidises tegeleme ainult lihtgraafidega, nimetame neid lühidalt *graa-
fideks*. Graafi G tipuhulka tähistame ka $V(G)$, servahulka $E(G)$ ja graafi serva
 $\{v_1, v_2\}$ ka (v_1, v_2) . Antud tähistuse korral siis $(v_1, v_2) = (v_2, v_1)$.

Definitsioon 2.2 Bijektsiooni $\varphi : V(G) \rightarrow V(G)$ nimetame graafi G auto-
morfismiks, kui

$$\forall x, y \in V(G) \quad (x, y) \in E(G) \Leftrightarrow (\varphi(x), \varphi(y)) \in E(G).$$

Graafi kõigi automorfismide hulk $\text{Aut}(G)$ on rühm kujutuste kompositsiooni
suhtes (vt [4], lk 190), seda rühma hakkame nimetama graafi *automorfis-
mirühmaks*.

Definitsioon 2.3 Graafi G tippude $x, y \in V(G)$ vaheliseks ahelaks nimeta-
me graafi tippude järjendit $(v_0 = x, \dots, v_n = y)$, kus $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$, $i =$
 $0, \dots, n - 1$. Arvu n nimetame ahela pikkuseks.

Definitsioon 2.4 Graafi tippude $x, y \in V(G)$ vaheliseks kauguseks nime-
tame lühima ahela pikkust tipust x tippu y , seda pikkust tähistame $d(x, y)$
(seega näiteks $d(x, x) = 0$). Graafi G diameetriks nimetame suurust

$$d(G) = \max_{x, y \in V(G)} d(x, y).$$

Definitsioon 2.5 Graafide G_1 ja G_2 otsekorrutiseks $G_1 \times G_2$ nimetatame
graafi tipuhulgaga

$$V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$$

ja servahulgaga $E(G_1 \times G_2)$, kus

$$\begin{aligned} & ((v_1^1, v_2^1), (v_1^2, v_2^2)) \in E(G_1 \times G_2) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow [v_1^1 = v_1^2 \& (v_2^1, v_2^2) \in E(G_2)] \vee [v_2^1 = v_2^2 \& (v_1^1, v_1^2) \in E(G_1)]. \end{aligned}$$

Edaspidises saab olulist rolli mängima graafi otseastme mõiste.

Definitsioon 2.6 Olgu G graaf. Graafi G otseastmed G^1, G^2, \dots määratakse võrdustega

$$\begin{aligned} G^1 &= G, \\ G^i &= G \times (G^{i-1}), \quad i > 1. \end{aligned}$$

Definitsioon 2.7 Tipu $v \in V(G)$ valentsiks nimetame suurust

$$\varrho(v) = |\{w \in V(G) \mid (v, w) \in E(G)\}|.$$

Kui graafi G kõigi tippude valentsid on võrdsed, nimetame graafi regulaarseks ja seda valentsi tähistame $\varrho(G)$.

Definitsioon 2.8 Olgu G graaf ja H rühma $\text{Aut}(G)$ alamrühm. Kui

$$\forall x, y \in V(G) \exists \varphi \in H \ y = \varphi(x),$$

siis nimetame graafi G tippudel transitiivseks (TT-graafiks) rühma H suhtes ja rühma H nimetame rühma $\text{Aut}(G)$ transitiivseks alamrühmaks.

Edaspidises esineb sageli olukord, kus $H = \text{Aut}(G)$, siis nimetame graafi G lihtsalt tippudel transitiivseks.

2.2 Kauguste loendaja

Osutub, et TT-graafide mitmeid huvitavaid omadusi saab iseloomustada järgmise mõiste abil.

Definitsioon 2.9 Olgu G graaf ja $u \in V(G)$. Graafi G kauguste loendajaks tipu u suhtes nimetame polünoomi

$$de_u(G) = \sum_{v \in V(G)} z^{d(u,v)}.$$

Osutub, et TT-graafi korral ei sõltu kauguste loendaja tipu u valikust.

Lemma 2.1 *Olgu G TT-graaf ja $u_1, u_2 \in V(G)$. Siis*

$$de_{u_1}(G) = de_{u_2}(G).$$

Tõestus. Vastavalt TT-graafi definitsioonile leidub selline permutatsioon $\phi \in \text{Aut}(G)$, et $u_2 = \phi(u_1)$. Siis saame kirjutada

$$de_{u_2}(G) = de_{\phi(u_1)}(G) = \sum_{v \in V(G)} z^{d(\phi(u_1), v)} = \sum_{\phi(v) \in V(G)} z^{d(\phi(u_1), \phi(v))} = \dots,$$

sest ϕ bijektiivsuse tõttu võtab avaldis $\phi(v)$ kõikvõimalikud väärtused hulgas $V(G)$;

$$\dots = \sum_{v \in V(G)} z^{d(u_1, v)} = de_{u_1}(G).$$

Q.E.D.

Järeldus 2.2 *TT-graafid on regulaarsed.*

Tõestus. Olgu G TT-graaf ja v_1 ning v_2 selle kaks tippu. Vastavalt graafi tipu suhtes võetud kauguste loendaja definitsioonile on selle polünoomi lineaarliikme kordaja võrdne antud tipu valentsiga. Et aga TT-graafi korral $de_{v_1}(G) = de_{v_2}(G)$, on nende polünoomide lineaarliikmed võrdsed, järelikult ka $\varrho(v_1) = \varrho(v_2)$. Et tipud v_1 ja v_2 olid suvalised, olemegi tõestanud TT-graafi G regulaarsuse.

Q.E.D.

Tänu lemmale 2.1 võib TT-graafide jaoks anda järgmise definitsiooni:

Definitsioon 2.10 *Olgu G TT-graaf ja $u \in V(G)$ suvaline tipp. Graafi G kauguste loendajaks nimetame polünoomi*

$$de(G) = \sum_{v \in V(G)} z^{d(u, v)}.$$

Näiteks, Peterseni graafi Pet (vt joonis 2) kauguste loendaja on

$$de(Pet) = 1 + 3z + 6z^2,$$

tsükli C_n kauguste loendaja aga

$$de(C_n) = \begin{cases} 1 + 2z + 2z^2 + \dots + 2z^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, & n \equiv 1 \pmod{2} \\ 1 + 2z + 2z^2 + \dots + z^{\frac{n}{2}}, & n \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

Edasistes konstruktsioonides läheb vaja järgmist lemmat.

Lemma 2.3 *Kui G_1 ja G_2 on TT-graafid, siis on ka $G_1 \times G_2$ TT-graaf ning $de(G_1 \times G_2) = de(G_1)de(G_2)$. Kui G on TT-graaf ja $de(G) = a_0 + a_1z + \dots + a_dz^d$, siis $a_0 = 1$, $a_1 = \varrho(G)$, $d = d(G)$.*

Tõestus. Esimene neist väidetest on standardne. Võtame graafist $G_1 \times G_2$ kaks tippu (u_1^1, u_2^1) ja (u_1^2, u_2^2) ning näitame selle graafi automorfismi, mis esimese neist tippudest teiseks kujutab. Kuna G_1 ja G_2 on TT-graafid, siis leiduvad nende automorfismid ϕ_1 ja ϕ_2 , mis kujutavad $\phi_1 : u_1^1 \mapsto u_1^2$ ja $\phi_2 : u_2^1 \mapsto u_2^2$. Arvestades graafide otsekorrutise definitsiooni on kujutus

$$\phi_1 \times \phi_2 : (v_1, v_2) \mapsto (\phi_1(v_1), \phi_2(v_2))$$

ilmselt graafi $G_1 \times G_2$ automorfism ning realiseerib vajaliku kujutuse valitud tippude vahel.

Teise väite kehtivuses veendumiseks on graafide G_1 ja G_2 otsekorrutist hea ette kujutada järgmiselt. Võtame graafist G_1 $n = |V(G_2)|$ koopiat G_1^1, \dots, G_1^n (graafi G_2 iga tipu jaoks ühe) ning ühendame koopiate vahel vastavad tipud, kui koopiatele vastavad tipud graafis G_2 on ühendatud. Siis saab kõnelda ka koopiate G_1^i ja G_1^j vahelisest kaugusest – see on koopiatele vastavate tippude vaheline kaugus graafis G_2 ja seda kaugust tähistame $d(G_1^i, G_1^j)$. Olgu

$$\begin{aligned} de(G_1) &= a_0 + a_1 + \dots + a_{d_1}z^{d_1}, \\ de(G_2) &= b_0 + b_1 + \dots + b_{d_2}z^{d_2}. \end{aligned}$$

Fikseerime graafis $G_1 \times G_2$ suvalise tipu u , graafi G_1 koopia, milles ta asub, olgu G_1^1 . Graafi G_1 koopiaid kaugusel 0 koopiast G_1^1 on definitsiooni järgi b_0 tükki (ja nagu näeme, $b_0 = 1$). Panus, mille annavad graafi $G_1 \times G_2$ kauguste

loendajasse tipud graafi G_1 koopia(te)st, mis asu(vad)b koopiast G_1^1 kaugusel 0, on seega

$$b_0 \sum_{\substack{v \in V(G_1^1) \\ d(G_1^i, G_1^1)=0}} z^{d(u,v)}.$$

Analoogiliselt vaatame läbi ka kõik teised koopiad (Lemma viimase väite kohaselt on kaugeim neist koopiast G_1^1 kaugusel d_2) ja saame $k = 0, \dots, d_2$ jaoks üldiselt leida koopiast G_1^1 kaugusel k asuvate koopiate poolt graafi $G_1 \times G_2$ kauguste loendajasse antavaks panuseks

$$b_k \sum_{\substack{v \in V(G_1^1) \\ d(G_1^i, G_1^1)=k}} z^{d(u,v)} = b_k \sum_{v \in V(G_1^1)} z^{d(u,v)+k} =$$

$$b_k z^k \sum_{v \in V(G_1^1)} z^{d(u,v)} = b_k z^k de(G_1).$$

Jääb vaid leida

$$\sum_{k=0}^{d_2} b_k z^k de(G_1) = de(G_1)de(G_2).$$

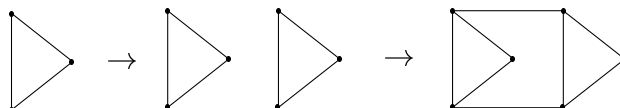
Lemma viimased väited on ilmsed.

Q.E.D.

3 Permutatsioonigraafid

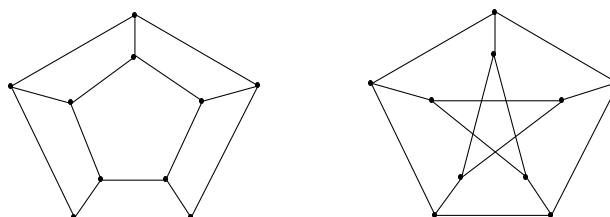
3.1 Permutatsioonigraafi mõiste

Lihtsaim võimalus esitada TT-graafi G suurema TT-graafi alamgraafina on moodustada graaf $G \times K_2$. Selgub aga, et võrkude jaoks on võimalik an-



Joonis 1: Graaf $K_3 \times K_2$

da tunduvalt paremaid konstruktsioone. Vaatame näidet, kus $G = C_5$ olgu viietipuline tsükkel. Võrdleme nimetatud konstruktsiooni Peterseni graafiga Pet . Mõlema graafi kokkupanemiseks graafi C_5 kahest koopiast on samapalju



Joonis 2: Graafid $C_5 \times K_2$ ja Pet

“vaeva nähtud”, kuid esimese graafi diameeter on 3, teise oma aga 2!

Edasiseks käsitleuseks on tarvilik järgmine definitsioon.

Definitsioon 3.1 Olgu graaf G tipuhulgaga $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ ja $\alpha \in S_n$. Permutatsioonigraafiks $P_\alpha(G)$ nimetame graafi tipuhulgaga

$$V(P_\alpha(G)) = \bigcup_{i=1}^2 \{v_1^i, \dots, v_n^i\}$$

ja servahulgaga

$$E(P_\alpha(G)) = \left[\bigcup_{i=1}^2 \{(v_{\alpha^{i-1}(k)}^i, v_{\alpha^{i-1}(l)}^i) \mid (v_k, v_l) \in E(G)\} \right] \cup$$

$$\bigcup \{(v_k^1, v_k^2) : k = 1, \dots, n\}.$$

Lihtne on näha, et graafis $P_\alpha(G)$ on (vähemalt) kaks graafiga G isomorfset alamgraafi – need, mille toodud definitsioon annab i fikseerimisel üheks kahest väärtusest. Neid alamgraafe (nagu ka analoogilisi alamgraafe järgnevates permutatsioonigraafide konstruktsioonides) hakkame nimetama permutatsioonigraafi *alusteks*. Need alused on küll isomorfset nii omavahel kui graafiga G märgendamata graafide mõttes, kuid vaadeldes tipuhulga $\{v_1, \dots, v_n\}$ elementide alumisi indekseid tippude märgenditena, on graafiga G üldjuhul isomorfne vaid see alus, mis vastab ülemise indeksi väärtusele $i = 1$. Juhul $i = 2$ saame märgendatud mõttes üldiselt erineva graafi, mida hakkame tähistama $\alpha(G)$. Graafi $\alpha(G)$ definitsioon on järgmine.

Definitsioon 3.2 *Olgu graaf G tipuhulgaga $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ ja $\alpha \in S_n$. Graafiks $\alpha(G)$ nimetame graafi tipuhulgaga*

$$V(\alpha(G)) = V(G)$$

ja servahulgaga

$$E(\alpha(G)) = \{(v_k, v_l) \mid (v_{\alpha^{-1}(k)}, v_{\alpha^{-1}(l)}) \in E(G)\}.$$

Edasi võime induktiivselt defineerida $\alpha^2(G) = \alpha(\alpha(G))$ jne.

Kaks ülaltoodud graafi on permutatsioonigraafid $P_\epsilon(C_5)$ ja $P_\alpha(C_5)$, kus

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Permutatsioonigraafide mõiste on sisse toodud ning nende mõningaid omadusi (peamiselt tasandilisust) uuritud Chartrand'i ja Harary töös [1].

3.2 Permutatsioonigraafide konstruktsioonist ja automorfismidest

Järgnevalt uurime, milliseid omadusi tuleks nõuda TT-graafilt G , tema automorfismirühma transitiivselt alamrühmalt H ning permutatsioonilt α , et tekkiv graaf $P_\alpha(G)$ oleks samuti TT-graaf.

Tulles tagasi eelmises jaotuses käsitletud Peterseni graafi näite juurde märkame kõigepealt, et lähtegraafi $G = C_5$ automorfismirühma üks transitiivne alamrühm on tekitatud permutatsiooni (12345) poolt (siin ja edaspidi analoogilistes situatsioonides vaatleme n -tipulise graafi automorfismirühma

kui sümmeetrilise rühma \mathcal{S}_n alamrühma). [Antud juhul on küll lihtne näha, et nõnda saame graafi C_5 kümnest automorfismist kätte ainult pooled, kuid ühest küljest pole graafi tippudel transitiivsuse näitamiseks rohkem vaja ja teisest küljest ei teagi me suuremate graafide korral sageli kogu automorfismirühma.]

Järgmiseks paneme tähele, et sama rühm $H = \langle (12345) \rangle$ toimib transitiivselt ka graafi $\alpha(G)$ tippudel (kus α on Peterseni graafi ülaltoodud konstruktsioonis kasutatud permutatsioon). Veel enamgi, võime väita, et kujutused

$$\tau_\varphi : v_k^i \mapsto v_{\varphi(k)}^i \quad (i = 1, 2; \varphi \in H)$$

on graafi $P_\alpha(G)$ automorfismid. Tõepoolest, et vastavalt kujutuste τ_φ definitsioonile töötavad nad aluste sees nagu rühma H elemendid ning et viimased on automorfismideks nii graafile G kui graafile $\alpha(G)$, on tarvis uurida ainult seda, mis juhtub aluseid ühendavate servadega, st servadega kujul (v_k^1, v_k^2) . Nende jaoks aga kehtib

$$(v_k^1, v_k^2) \in E(P_\alpha(G)) \Leftrightarrow (v_{\varphi(k)}^1, v_{\varphi(k)}^2) \in E(P_\alpha(G)),$$

seega on τ_φ näol tegu graafi $P_\alpha(G)$ automorfismidega.

Automorfismid τ_φ lubavad kujutada tippe üksteiseks aluste sees, seega vajame veel kujutust, mis lubaks vahetada tippe aluste vahel. Selliseks kujutuseks on

$$\sigma : v_k^i \mapsto v_{\alpha(k)}^{i+1}, \quad i = 1, 2,$$

kus ülemiste indeksite liitmine toimub modulo 2. Tõestamiseks, et kujutus σ on tõesti graafi $P_\alpha(G)$ automorfism, kasutame tema servahulga loomulikku tükeldust kolmeks alamhulgaks.

1. Serva $(v_k^1, v_k^2) \in E(P_\alpha(G))$ korral

$$\begin{aligned} (v_k^1, v_l^1) \in E(P_\alpha(G)) &\Leftrightarrow \\ (v_k, v_l) \in E(G) &\Leftrightarrow \\ (v_{\alpha(k)}^2, v_{\alpha(l)}^2) \in E(P_\alpha(G)). & \end{aligned}$$

2. Et $\alpha^2 \in \text{Aut}(G)$, saame serva $(v_k^2, v_l^2) \in E(P_\alpha(G))$ jaoks

$$\begin{aligned} (v_k^2, v_l^2) \in E(P_\alpha(G)) &\Leftrightarrow \\ (v_k, v_l) \in E(\alpha(G)) &\Leftrightarrow \\ (v_{\alpha^{-1}(k)}, v_{\alpha^{-1}(l)}) \in E(G) &\Leftrightarrow \\ (v_{\alpha^2\alpha^{-1}(k)}, v_{\alpha^2\alpha^{-1}(l)}) \in E(G) &\Leftrightarrow \\ (v_{\alpha(k)}, v_{\alpha(l)}) \in E(G) &\Leftrightarrow \\ (v_{\alpha(k)}^1, v_{\alpha(l)}^1) \in E(P_\alpha(G)). \end{aligned}$$

3. Serva $(v_k^1, v_k^2) \in E(P_\alpha(G))$ korral on selge, et

$$\begin{aligned} (v_k^1, v_k^2) \in E(P_\alpha(G)) &\Leftrightarrow \\ (v_{\alpha(k)}^1, v_{\alpha(k)}^2) \in E(P_\alpha(G)) &\Leftrightarrow \\ (v_{\alpha(k)}^2, v_{\alpha(k)}^1) \in E(P_\alpha(G)). \end{aligned}$$

Toodud arutluses on olulised kaks momenti. Esiteks kasutatakse asjaolu, et rühma H elemendid on automorfismideks nii graafile G kui ka graafile $\alpha(G)$ ning teiseks seda, et $\alpha^2 \in \text{Aut}(G)$. Kokkuvõttes oleme tõestanud järgmise tulemuse.

Lause 3.1 *Olgu antud n -tipuline TT -graaf G , tema automorfismirühma transitiivne alamrühm H ning substitutsioon $\alpha \in \mathcal{S}_n$ selline, et rühma H elemendid on automorfismideks ka graafile $\alpha(G)$ ja $\alpha^2 \in \text{Aut}(G)$. Siis on graaf $P_\alpha(G)$ samuti TT -graaf.*

Märgime, et Lause 3.1 tõestus annab meile rohkem informatsiooni, kui on vajalik tema tõestamiseks. Nimelt saame moodustajate kaudu ka graafi $P_\alpha(G)$ automorfismirühma mingi transitiivse alamrühma kirjelduse. Kuna juba rühm H ei pruukinud olla võrdne kogu rühmaga $\text{Aut}(G)$, ei pea seda olema ka saadud rühm graafi $P_\alpha(G)$ jaoks. Näiteks sobib vaadeldud Peterseni graafi konstruktsioon. Lause tõestusest saame selle graafi 20elemendilise automorfismide rühma, tegelikult on Peterseni graafi täielikus automorfismirühmas aga 120 elementi (vt [2]).

Tuleme tagasi käesoleva peatüki alguse juurde, kus permutatsioonigraafide kasutuselevõttu motiveeriti võimalusega saada väiksema diameetriga graaf kui tavalise otsekorrutise korral. Arvestades aga, et juhul $\alpha \in \text{Aut}(G)$ kehtib ilmselt $P_\alpha(G) \simeq G \times K_2$, siis sel juhul me diameetrivõitu kindlasti ei saa. Täpsemalt, kehtib järgmine lause.

Lause 3.2 Olgu $\alpha \in \mathcal{S}_n$ suvaline permutatsioon. Siis $d(P_\alpha(G)) \leq d(G) + 1$. Muuhulgas, kui $\alpha \in \text{Aut}(G)$, siis $d(P_\alpha(G)) = d(G) + 1$.

Tõestus. Võtame kaks tippu graafist $P_\alpha(G)$ ja veendume, et nendevaheline kaugus pole suurem kui $d(G) + 1$. Kuna graafi $P_\alpha(G)$ mõlemad alused on isomorfised graafiga G , siis

$$\forall v_k^i, v_l^i \in V(P_\alpha(G)) \quad d(v_k^i, v_l^i) \leq d(G), \quad i = 1, 2.$$

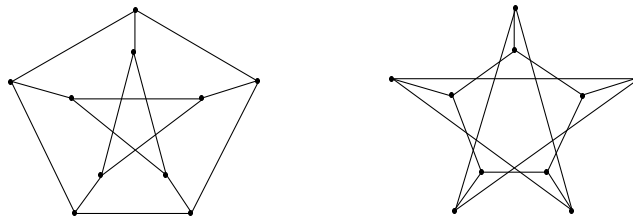
Kui meil on aga tipud $v_k^1, v_l^2 \in V(P_\alpha(G))$, siis saame $d(v_k^1, v_l^2) \leq d(G) + 1$, sest $(v_k^1, v_k^2) \in E(P_\alpha(G))$, $d(v_k^2, v_l^2) \leq d(G)$ ja tippudevaheline kaugus graafis rahuldab kolmnurgavõrratust.

Kui $\alpha \in \text{Aut}(G)$, nägime, et $P_\alpha(G) \simeq G \times K_2$, kus K_2 on täielik kahtipuline graaf kauguste loendajaga $de(K_2) = 1 + z$, mistõttu Lemma 2.1 põhjal

$$\begin{aligned} d(P_\alpha(G)) &= \text{deg}(de(P_\alpha(G))) = \text{deg}(de(G \times K_2)) = \\ &= \text{deg}(de(G)de(K_2)) = \text{deg}(de(G)(1 + z)) = \\ &= \text{deg}(de(G)) + 1 = d(G) + 1. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Seega on diameetrivõidu saavutamiseks tarvilik tingimus, et antud TT-graafil G leiduksid selline automorfismirühma transitiivne alamrühm H ja tippuhulga permutatsioon α , et $\alpha \notin \text{Aut}(G)$, kuid H elemendid oleksid siiski ka graafi $\alpha(G)$ automorfismideks. (Hetkel on tingimuseks küll ka $\alpha^2 \in \text{Aut}(G)$, kuid järgmises punktis näeme, et sellest eeldusest saab loobuda.) Autori jaoks oli pikka aega lahtine küsimus selle tingimuse piisavusest. Osutub, et sellise



Joonis 3: Graafid Pet ja $\alpha(Pet)$

rühma H olemasolust siiski ei piisa diameetrivõidu saamiseks. Kontranäiteks

sobib ülalvaadeldud Peterseni graaf, kus rühmaks H on sama konstrueeritud 20elemendiline rühm. Vajalik permutatsioon α toimib nii, nagu näidatud joonisel 3. Lihtne on näha, et $d(P_\alpha(Pet)) = 3$. Et ka $d(Pet \times K_2) = 3$, ei saavutanud me selle näite korral diameetrivõitu. Samas on endiselt lahtine küsimus – kui leidub permutatsioon $\alpha \notin Aut(G)$, et graafi G terve automorfismirühma $Aut(G)$ kõik elemendid on ka graafi $\alpha(G)$ automorfismideks, kas siis kehtib $d(P_\alpha(G)) < d(K_2 \times G)$?

3.3 Permutatsioonkorrutis

Eelpool jäi lahtiseks küsimus, mida teha, kui meil on graaf G ning selle tipuhulga permutatsioon α sellised, et graafidel G ja $\alpha(G)$ on ühine automorfismirühma transitiivne alamrühm, kuid $\alpha^2 \notin Aut(G)$. Sel juhul võib permutatsioonigraafi muidugi konstrueerida, kuid see ei pea tulema TT-graaf.

Teisalt on selge, et mingi positiivse m korral peab kindlasti $\alpha^m \in Aut(G)$, sest α kui lõpliku rühma \mathcal{S}_n elemendi mingi aste peab olema ühik. Olgu siis m selline positiivne (mitte tingimata vähim võimalik) täisarv, et $\alpha^m \in Aut(G)$. Kui permutatsioonigraafi konstrueerimisel võtsime alusteks graafid G ja $\alpha(G)$, siis nüüd on samas rollis graafid $G, \alpha(G), \dots, \alpha^{m-1}(G)$. Võtame kasutusele järgmise üldise mõiste.

Definitsioon 3.3 Olgu G_1 ja G_2 graafid, $V(G_1) = \{v_1, \dots, v_n\}$, $V(G_2) = \{u_1, \dots, u_m\}$, $\alpha \in \mathcal{S}_n$. Graafide G_1 ja G_2 permutatsioonkorrutiseks permutatsiooni α abil nimetame graafi $G_1\alpha G_2$ tipuhulgaga

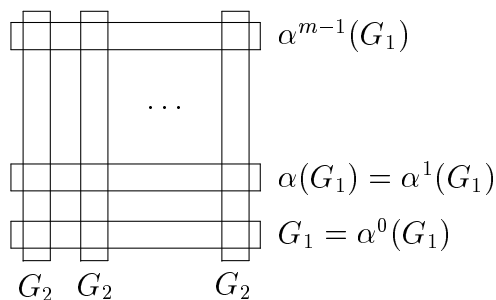
$$V(G_1\alpha G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$$

ja servahulgaga

$$\begin{aligned} E(G_1\alpha G_2) &= \\ &= \{((v_i, u_k), (v_j, u_k)) \mid k = 1, \dots, m, (v_i, v_j) \in E(\alpha^{k-1}(G_1))\} \cup \\ &\cup \{((v_i, u_k), (v_i, u_l)) \mid i = 1, \dots, n, (u_k, u_l) \in E(G_2)\}. \end{aligned}$$

See definitsioon üldistab nii graafide otsekorrutise kui permutatsioonigraafi mõisteid – esimene vastab juhule, kus α on ühikpermutatsioon ja teine juhule, kus $G_2 = K_2$.

Graafide permutatsioonkorrutist on mugav ette kujutada joonisel 4 toodud skeemi abil.



Joonis 4: Permutatsioonkorrutis

Selle skeemi aluseid $\alpha^k(G_1)$ hakkame kutsuma *horisontaalseteks alusteks*, graafist G_2 saadud aluseid aga *vertikaalseteks alusteks*.

Loomulikult tuleb küsida, millistel tingimustel on kahe graafi permutatsioonkorrutis TT-graaf. Sobivad piisavad tingimused annab järgmine lause.

Lemma 3.3 *Olgu antud n -tipuline TT-graaf G_1 , tema automorfismirühma transitiivne alamrühm H ning $\alpha \in \mathcal{S}_n$ sellised, et rühma H elemendid on automorfismideks ka graafide $\alpha(G_1)$ ja $\alpha^m \in \text{Aut}(G_1)$. Olgu graaf G_2 tipuhulgaga $V(G_2) = \{u_1, \dots, u_m\}$ selline, et rühma \mathcal{S}_m element $(12 \dots m)$ on tema automorfism. Siis on permutatsioonkorrutis $G_1 \alpha G_2$ TT-graaf.*

Tõestus. Induktsiooniga t järgi võib veenduda, et $\varphi \in H \leq \text{Aut}(G_1)$ ja $\varphi \in \text{Aut}(\alpha(G_1))$ korral ka $\varphi \in \text{Aut}(\alpha^t(G_1))$ iga positiivse täisarvu t korral. Kujutused

$$\bar{\varphi} : (v_i, u_k) \mapsto (v_{\varphi(i)}, u_k) \quad (\varphi \in H)$$

lahendavad horisontaalsete aluste sees transitiivsuse probleemi, osutudes graafi $G_1 \alpha G_2$ automorfismideks. Tõesti, $\bar{\varphi}$ näol on tegu selle graafi tipuhulga bijektsiooniga.

Juhul $((v_i, u_k), (v_j, u_k)) \in E(G_1 \alpha G_2)$, st $(v_i, v_j) \in E(\alpha^{k-1}(G_1))$ saame

$$\bar{\varphi}(((v_i, u_k), (v_j, u_k))) = ((v_{\varphi(i)}, u_k), (v_{\varphi(j)}, u_k)) \in E(G_1 \alpha G_2),$$

sest $\varphi \in \text{Aut}(\alpha^{k-1}(G_1))$ ja järelikult $(v_{\varphi(i)}, v_{\varphi(j)}) \in E(\alpha^{k-1}(G_1))$.

Juhul $((v_i, u_k), (v_i, u_l)) \in E(G_1 \alpha G_2)$, st $(u_k, u_l) \in E(G_2)$ ilmselt ka

$$\bar{\varphi}(((v_i, u_k), (v_i, u_l))) = ((v_{\varphi(i)}, u_k), (v_{\varphi(i)}, u_l)) \in E(G_1 \alpha G_2).$$

Tõestamaks graafi $G_1\alpha G_2$ transitiivsust tippudel, tuleb näidata kujutus, mis võimaldab tippe viia ühest horisontaalsest alusest teise. Selleks sobib kujutus

$$\sigma : (v_i, u_k) \mapsto (v_{\alpha(i)}, u_{k+1}) \quad (k \bmod m).$$

Jääb veenduda, et kujutus σ on graafi $G_1\alpha G_2$ automorfism. Kujutus σ on bijektsioon permutatsioonikorrutise tipuhulgal. Graafi $G_1\alpha G_2$ servadel aga, juhul $((v_i, u_k), (v_j, u_k)) \in E(G_1\alpha G_2)$, st $(v_i, v_j) \in E(\alpha^{k-1}(G_1))$ saame

$$\sigma(((v_i, u_k), (v_j, u_k))) = ((v_{\alpha(i)}, u_{k+1}), (v_{\alpha(j)}, u_{k+1})).$$

Kui $k < m$, siis $(v_{\alpha(i)}, v_{\alpha(j)}) \in E(\alpha(\alpha^{k-1}(G_1))) = E(\alpha^{(k+1)-1}(G_1))$, seega $\sigma(((v_i, u_k), (v_j, u_k))) \in E(G_1\alpha G_2)$.

Kui aga $k = m$, siis

$$\sigma(((v_i, u_k), (v_j, u_k))) = ((v_{\alpha(i)}, u_1), (v_{\alpha(j)}, u_1)).$$

Seega on vaja, et $(v_{\alpha(i)}, v_{\alpha(j)}) \in E(G_1)$. See on aga täidetud tingimus, sest $(v_i, v_j) \in E(\alpha^{m-1}(G_1))$ ja $\alpha^m \in \text{Aut}(G_1)$.

Juhul $((v_i, u_k), (v_i, u_l)) \in E(G_1\alpha G_2)$, st $(u_k, u_l) \in E(G_2)$ saame

$$\sigma(((v_i, u_k), (v_i, u_l))) = ((v_{\alpha(i)}, u_{k+1}), (v_{\alpha(i)}, u_{l+1})).$$

Tõestuse lõpuleviimiseks vajalik tingimus $(u_{k+1}, u_{l+1}) \in E(G_2)$ on täidetud tulenevalt lemma eelduseks olevast nõudest, et permutatsioon $(12 \dots m)$ on graafi G_2 automorfism.

Q.E.D.

Tõestatud lemma annabki võimaluse permutatsioonigraafi konstrueerimiseks ka üldjuhul, kui leitud permutatsiooni järk ei ole 2. Toodud konstruksioonis läks vaja sellist m -tipulist graafi G_2 , mille automorfismirühm sisaldaks permutatsiooni $(12 \dots m)$ poolt tekitatud alamrühm, selliseid graafe nimetatakse *tsirkulantgraafideks*, vt nt [5]. Lihtsaimateks näideteks on m -tipuline tsükkel C_m ja m -tipuline täielik graaf K_m .

4 Graafid Q_n

Selles peatükis käsitleme põhjalikult kuupgraafide Q_n näidet ja selgitame nende omadused seoses permutatsioonigraafide konstruktsiooniga.

Graafe Q_n võib defineerida mitmel erineval moel. Kasutame neist kaht võimalust.

Definitsioon 4.1 $Q_n = (K_2)^n$, $n \geq 1$.

Definitsioon 4.2 Graaf Q_n , $n \geq 1$ on graaf tipuhulgaga

$$V(Q_n) = (\mathbb{Z}_2)^n$$

ja servahulgaga

$$E(Q_n) = \{((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \mid \exists! i a_i \neq b_i\}.$$

Nende definitsioonide samaväärsuses võib veenduda induktsiooniga n järgi, samuti järeldub see isomorfism järgmises peatükis tõestatavast üldisemast lemmast 5.1.

Graafid Q_n on ilmselt TT-graafid ning alul käsitlemegi neid kui TT-graafe kogu automorfismirühma suhtes.

Vaatleme graafi Q_n automorfismirühma $Aut(Q_n)$ poolt indutseeritud toimet hulgal $\{\{u, v\} \mid u, v \in V(Q_n), u \neq v\}$. Paneme tähele, et kui tipupaarid $\{u_1, v_1\}$ ja $\{u_2, v_2\}$ kuuluvad selle toime samasse orbiiti, siis $d(u_1, v_1) = d(u_2, v_2)$, seega saab iga orbiidiga siduda ühe positiivse täisarvu, mida hakkame nimetama *orbiidi laiuseks*. Rakendades graafide automorfismi, jäävad nii orbiidid kui nende laiused samaks. Rakendades aga sellist permutatsiooni $\alpha \notin Aut(Q_n)$, et graafi Q_n automorfismid on ka graafi $\alpha(Q_n)$ automorfismideks, säilivad küll orbiidid, kuid mitte nende laiused (viimast on kõige lihtsam näha nii: kui säiliks orbiitide laiused, siis jääksid samaks ka orbiidid laiusega 1, st servahulk, seega oleks tegu graafi automorfismiga). Seega, otsimaks viimatikirjeldatud permutatsioone (millede abil on lootust saada permutatsioonigraafi konstruktsioonil diameetrivõitu), tuleb otsida orbiite, mille laius on suurem kui 1, kuid millel on samapalju elemente kui mõnel orbiidil laiusega 1.

Järgmiseks paneme tähele, et graafi Q_n korral on iga laiusega orbiite täpselt üks. Teisisõnu, kui meil on tipupaarid $\{u_1, v_1\}$ ja $\{u_2, v_2\}$ sellised,

et $d(u_1, v_1) = d(u_2, v_2)$, eksisteerib graafi selline automorfism, mis viib ühe tipupaari teiseks. Selle väite tõestuse (üldistatud juhul) annab lemma 5.2. Seega on ka kõik servadega määratud tipupaarid samas orbiidis (mille kohta ütleme, et graaf on *transitiivne servadel* ehk *ST-graaf*).

Leiame, palju on elemente orbiidil laiusega k . Et

$$de(Q_n) = de((K_2)^n) = (de(K_2))^n = (1 + z)^n,$$

on ühest tipust kaugusel k asuvaid tippe $\binom{n}{k}$ tükki. Graafis Q_n on 2^n tippu, seega tipupaare, mille elementide vaheline kaugus on k , on

$$\frac{\binom{n}{k} \cdot 2^n}{2} = \binom{n}{k} \cdot 2^{n-1}$$

tükki. Järelikult on ainus orbiit, millel on veel samapalju elemente kui orbiidil laiusega 1, orbiit laiusega $n - 1$. Seega on graafi $\alpha(Q_n)$ rolli mõtet proovida ainult graafi Q'_n , mis on defineeritud kui graaf tipuhulgaga

$$V(Q'_n) = (\mathbb{Z}_2)^n$$

ja servahulgaga

$$E(Q'_n) = \{(v_1, v_2) \mid d(v_1, v_2) = n - 1\},$$

kus $d(v_1, v_2)$ tähistab vastavate tippude vahelist kaugust graafis Q_n ehk vastavate kahendvektorite Hammingi kaugust.

Nüüd võime tõestada järgmise teoreemi.

Teoreem 4.1 *Olgu $n \geq 2$. Siis $Q_n \simeq Q'_n$, kui n on paarisarv ja $Q_n \not\simeq Q'_n$, kui n on paaritu.*

Tõestus. Vaatleme alul juhtu, kus n on paaritu. Tõestame, et sel juhul pole graaf Q'_n sidus. Tõepoolest: kuna n on paaritu, on $n - 1$ paaris ja järelikult seovad graafi Q'_n servad niisuguseid tipuhulga $(\mathbb{Z}_2)^n$ elemente (kahendvektoreid), mis erinevad vektoritena teineteisest paarisarvul positsioonidel. Seega pole graafis Q'_n võimalik konstrueerida ahelat, mis viiks paarisarvulise kaaluga tipust paaritu kaaluga tippu ja graaf Q'_n on mittesidus. Et graaf Q_n on ilmselt sidus, ei saa graafid Q_n ja Q'_n paaritu n korral isomorfsed olla.

Veendumaks, et paarisarvulise n korral on $Q_n \simeq Q'_n$, vaatleme nende ühise tipuhulga $(\mathbb{Z}_n)^2$ teisendust

$$\phi : (a_1, \dots, a_n) \mapsto (a_1 + \sum_{i=1}^n a_i, \dots, a_n + \sum_{i=1}^n a_i).$$

Kõigepealt paneme tähele, et see teisendus on hulga $(\mathbb{Z}_2)^n$ bijektsioon, sest ta on iseenda pöördteisendus:

$$\begin{aligned} \phi(\phi(a_1, \dots, a_n)) &= \phi(a_1 + \sum_{i=1}^n a_i, \dots, a_n + \sum_{i=1}^n a_i) = \\ &= (a_1 + \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n a_i + n \sum_{i=1}^n a_i, \dots, a_n + \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n a_i + n \sum_{i=1}^n a_i) = \\ &= (a_1, \dots, a_n), \end{aligned}$$

sest n on paaris ja liitmine toimub korpuses \mathbb{Z}_2 .

Veendume nüüd, et teisendus ϕ viib graafi Q_n servad graafi Q'_n servadeks. Olgu $((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \in E(Q_n)$, st $d((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = 1$. Seega on üks neist kahest vektorist paaris-, teine paaritu kaaluga. Vastavalt teisenduse ϕ definitsioonile jääb paariskaaluga vektor samaks, paaritu kaaluga vektoris aga muutuvad kõik komponendid vastupidiseks ja kui enne teisendust erinesid vektorid ühel positsioonil, siis pärast teisendust erinevad nad $n - 1$ positsioonil. St $d(\phi(a_1, \dots, a_n), \phi(b_1, \dots, b_n)) = n - 1$ ehk $(\phi(a_1, \dots, a_n), \phi(b_1, \dots, b_n)) \in E(Q'_n)$. Analoogiliselt saab tõestada, et teisenduse ϕ pöördteisendus (st ϕ ise) viib graafi Q'_n servad graafi Q_n servadeks, järelikult $Q_n \simeq Q'_n$.

Q.E.D.

Selle teoreemi põhjal on permutatsioonigraafi kontruktiooniga lootust diameetrivõitu saada graafidelt Q_n , kus n on paarisarv. Loomulik küsimus on, kas ja kui suur see võit tuleb võrreldes tavalise otsekorrutise abil saadava graafi Q_{n+1} diameetriga $n + 1$. Sobivaks permutatsiooniks on loomulikult seesama teoreemi tõestuses defineeritud teisendus ϕ ; järgmine lause näitab, et võit diameetris on ligikaudu kahekordne.

Lause 4.2 *Olgu $n \geq 4$ paarisarv. Siis*

$$d(P_\phi(Q_n)) = \begin{cases} 4, & n = 4; \\ \frac{n}{2} + 1, & n \geq 6. \end{cases}$$

Tõestus. Juhu $n = 4$ võib lihtsalt eraldi läbi vaadata. Võtame suvalise tipu v graafi $P_\phi(Q_4)$ alusest Q_4 , olgu see näiteks kahendvektorina $v = (0, 0, 0, 0)$. Näeme, et tipp $(1, 1, 1, 1)$ samast alusest on ka graafis $P_\phi(Q_4)$ sellest tipust kaugusel 4, teise aluse kaudu “ringi minek” ei vähenda seda kaugust. Kõik teised aluse Q_4 tipud olid juba graafis Q_4 tipule v lähemal kui 4, ammugi on see nõnda siis graafis $P_\phi(Q_4)$. Teise aluse $\phi(Q_4)$ tippude jaoks paneme tähele, et

1. kui tipu $w \in V(\phi(Q_4))$ kui kahendvektori kaal ei ületa kaalu 2, siis $d(v, w) \leq 3$, sest tippu w pääseb tipust v järgmiselt: kõigepealt liigume ülimalt 2 sammuga aluse Q_4 sees tipule w vastavasse tippu ning siis ühe sammuga alusesse $\phi(Q_4)$ tippu w ;
2. kui tipu $w \in V(\phi(Q_4))$ kui kahendvektori kaal on 3, siis on $d(v, w) = 2$, sest tippu w pääseb tipust v järgmiselt: kõigepealt läheme ühe sammuga tipust v vastavasse tippu aluses $\phi(Q_4)$, mis on graafi $\phi(Q_4) = Q'_4$ definitsiooni põhjal ühendatud tipuga w (ja lühemat teed kui tee pikusega 2 ilmselt ei ole);
3. kui tipu $w \in V(\phi(Q_4))$ kui kahendvektori kaal on 4, on $d(v, w) \leq 3$, sest sest tippu w pääseb tipust v järgmiselt: kõigepealt liigume aluses Q_4 tipust v ühe sammuga suvalisse tippu kaaluga 1, seejärel ühe sammuga vastavasse tippu aluses $\phi(Q_4)$, viimane tipp aga on jällegi graafi Q'_4 definitsiooni põhjal ühendatud tipuga w .

Tõestamiseks, et $n \geq 6$ korral läheb tipust v (olgu see jälle aluse Q_n tipp $(0, \dots, 0)$) kõige kaugematesse tippudesse jõudmiseks vaja $\frac{n}{2} + 1$ sammu, tuleb tõestada kaht asja. Esiteks, et leiduvad tipud, mis on tipust v kaugusel $\frac{n}{2} + 1$, ja teiseks, et ükski tipp pole tipust v kaugemal kui $\frac{n}{2} + 1$.

Sõnastuse mugavuse huvides ütleme, et tipp $w \in V(P_\phi(Q_n))$ *asub kihis number k* , kui tema kui kahendvektori kaal on k . **NB!** Tippude numeratsioon kahendvektoritena toimub mõlemas aluses eraldi, seega vastab igale vektorile kaks tippu, üks kummaski aluses, ja need kaks tippu on vastavalt graafi $P_\phi(Q_n)$ definitsioonile ühendatud.

Kõigepealt näitame, et kui tipp w kuulub aluses $\phi(Q_n)$ kihti number $\frac{n}{2}$, siis $d(v, w) = \frac{n}{2} + 1$.

Paneme tähele, et liikumine mööda serva ühest tipust teise aluses Q_n tähendab tippude jaoks erinevust 1 koordinaadi võrra, liikumine aluses $\phi(Q_n)$

aga erinevust $n - 1$ koordinaadi võrra. Mõlemal juhul muutub tipule vastavas kahendvektoris 0de ja 1de arvu erinevus 2 võrra. Seega liikumaks tipust kaaluga 0 (kus 0de ja 1de arvu erinevus on n) tippu kaaluga $\frac{n}{2}$ (kus see erinevus on 0), tuleb aluste sees teha vähemalt $\frac{n}{2}$ sammu (aluste vahel liikumine kahendvektorit ei muuda). Lisades siia vähemalt ühe sammu, mis tuleb teha alusest Q_n alusesse $\phi(Q_n)$ liikumiseks, saamegi, et $d(v, w) \geq \frac{n}{2} + 1$. Samas on ilmne, et $\frac{n}{2} + 1$ sammu on piisav tipust v tippu w jõudmiseks.

Veendumaks, et suvalise tipu $w \in V(P_\phi(Q_n))$ korral $d(v, w) \leq \frac{n}{2} + 1$, vaatame läbi järgmised juhud.

1. Kui tipp w on kihis number $0, 1, \dots, \frac{n}{2}$ ükskõik kummas aluses, on $d(v, w) \leq \frac{n}{2} + 1$, sest tipust v saab minna tippu w järgmiselt: kõigepealt teeme mitte enam kui $\frac{n}{2}$ sammu jõudmaks vajaliku kahendvektorini aluses Q_n ja seejärel veel võibolla ühe sammu teise alusesse minekuks.
2. Kui $w = (1, \dots, 1)$ on tipp aluses Q_n , pääseb sinna 4 sammuga sama moodi kui $n = 4$ korral, ainult et juhul $n \geq 6$ kehtib $4 \leq \frac{n}{2} + 1$.
3. Kui $w = (1, \dots, 1)$ on tipp aluses $\phi(Q_n)$, pääseb tipust v sinna kolme sammuga jälle analoogiliselt juhule $n = 4$.
4. Kui w on tipp kihis number $\frac{n}{2} + 1$ aluses Q_n , pääseb sinna $\frac{n}{2} + 1$ sammuga.
5. Kui w on tipp kihis number $\frac{n}{2} + 2, \dots, n - 1$ aluses Q_n pääseb tipust v sinna järgmiselt: kõigepealt ühe sammuga tippu $(0, \dots, 0)$ aluses $\phi(Q_n)$, järgmise sammuga kihti number $n - 1$ samas aluses, kolmanda sammuga kihti number $n - 1$ aluses Q_n ning siis ülimalt $((n - 1) - (\frac{n}{2} + 2)) = \frac{n}{2} - 3$ sammuga tippu w . Kokku seega ülimalt $\frac{n}{2}$ sammu.
6. Kui w on tipp kihis number $\frac{n}{2} + 2, \dots, n - 1$ aluses $\phi(Q_n)$, pääseb tipust v sinna ülimalt $\frac{n}{2} + 1$ sammuga järgmiselt: kõigepealt liigume ülimalt $\frac{n}{2}$ sammuga vastavasse tippu aluses Q_n , nagu kirjeldatud eelmises punktis, seejärel kasutame veel ühte sammu aluse vahetamiseks.

Q.E.D.

Seega saime paarisarvulise n korral anda soovitud konstruktsiooni, vaadeldes graafi Q_n TT-graafina tema automorfismirühma suhtes. Samas paaritarvulise n korral ei leidunud sellist permutatsiooni $\alpha \notin \text{Aut}(Q_n)$, et

rühm $Aut(Q_n)$ oleks ka graafi $\alpha(Q_n)$ automorfismirühmaks. Kas paaritute n väärtuste korral jääbki parimaks konstruktsioon $K_2 \times Q_n = Q_{n+1}$? Ei, selgub, et eksisteerib ka konstruktsioon, mis annab sama diameetrivõidu suvalise n korral, ainult et selleks tuleb graafi Q_n vaadelda TT-graafina automorfismirühma pärisalamrühma suhtes.

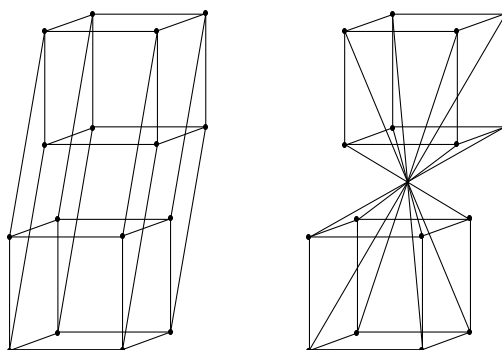
Defineerime graafi Q_n'' ($n \geq 2$) kui graafi tipuhulgaga

$$V(Q_n'') = (\mathbb{Z}_2)^n$$

ja servahulgaga

$$\begin{aligned} E(Q_n'') = & \{((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \mid a_n = b_n \& \\ & \& d((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = 1\} \cup \\ & \cup \{((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \mid \\ & d((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = n\}. \end{aligned}$$

Graafid Q_4 ja Q_4'' näevad samal tipuhulgal välja näiteks sellised, nagu näidatud joonisel 5.



Joonis 5: Graafid Q_n ja Q_n''

Tõestame, et $Q_n \simeq Q_n''$. Selleks vaatleme nende ühise tipuhulga $(\mathbb{Z}_2)^n$ teisendust

$$\psi : (a_1, \dots, a_n) \mapsto (a_1 + a_n, a_2 + a_n, \dots, a_{n-1} + a_n, a_n).$$

Panene tähele, et teisendus ψ on iseenda pöördteisendus

$$\begin{aligned} \psi(\psi(a_1, \dots, a_n)) &= \psi(a_1 + a_n, a_2 + a_n, \dots, a_{n-1} + a_n, a_n) = \\ &= (a_1 + a_n + a_n, a_2 + a_n + a_n, \dots, a_{n-1} + a_n + a_n, a_n) = (a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

ja seega hulga $(\mathbb{Z}_2)^n$ bijektsioon. Olgu $((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \in E(Q_n)$. Vaatame läbi järgmised juhud:

1. $a_n = b_n = 0$. Siis $d((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = 1$, $\psi((a_1, \dots, a_n)) = (a_1, \dots, a_n)$, $\psi((b_1, \dots, b_n)) = (b_1, \dots, b_n)$ ja seega $(\psi((a_1, \dots, a_n)), \psi((b_1, \dots, b_n))) \in E(Q_n'')$.
2. $a_n = b_n = 1$. Ka sel juhul $d((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = 1$, millest ψ definitsiooni põhjal järeldub $d(\psi((a_1, \dots, a_n)), \psi((b_1, \dots, b_n))) = 1$ ja seega $(\psi((a_1, \dots, a_n)), \psi((b_1, \dots, b_n))) \in E(Q_n'')$.
3. $a_n = 0, b_n = 1$. Siis $d((a_1, \dots, a_{n-1}), (b_1, \dots, b_{n-1})) = 0$ ja teisenduse ψ definitsiooni põhjal saame $d(\psi((a_1, \dots, a_n)), \psi((b_1, \dots, b_n))) = n$, järelikult $(\psi((a_1, \dots, a_n)), \psi((b_1, \dots, b_n))) \in E(Q_n'')$.

Analoogiliselt tõestatakse, et ψ pöördteisendus (ehk ψ ise) viib graafi Q_n'' servad graafi Q_n servadeks.

Jääb veel leida hulga $(\mathbb{Z}_2)^n$ kõigi permutatsioonide rühma transitiivne alamrühm, mille elemendid on mõlema graafi automorfismideks. Sellise alamrühma moodustajateks sobivad teisendused

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \dots, a_n) &\mapsto (a_1 + 1, a_2, \dots, a_n), \\ (a_1, a_2, \dots, a_n) &\mapsto (a_1, a_2 + 1, \dots, a_n), \\ &\dots \\ (a_1, a_2, \dots, a_n) &\mapsto (a_1, a_2, \dots, a_n + 1). \end{aligned}$$

Kõik need teisendused on hulga $(\mathbb{Z}_2)^n$ bijektsioonid olles jällegi iseenda pöördteisendused. Lisaks moodustavad nad rühma $Aut(\mathbb{Z}_2^n)$ transitiivse alamrühma. Veendume, et selle alamrühma elemendid on nii graafi Q_n kui graafi Q_n'' automorfismideks.

Graafi Q_n on lihtne – kõik loetletud teisendused jätavad samaks suvaliste kahendvektorite vahelised kaugused, seega jääb paika graafi Q_n servahulk. Analoogiline arutelu töötab ka graafi Q_n'' jaoks, sest ka tema servad on defineeritud kahendvektorite kauguste abil; lisaks tuleb tähele panna seda, et ka seos $a_n = b_n$ jääb toodud teisenduste korral kehtima.

Nii saame suvalise $n \geq 2$ jaoks konstrueerida permutatsioonigraafi $P_\psi(Q_n)$. Tema diameetri annab

Lause 4.3 Olgu $n \geq 2$. Siis

$$d(P_\psi(Q_n)) = \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor.$$

Tõestus. Selle lause tõestus on täpselt analoogiline Lause 4.2 põhiosa tõestusega, eraldi tuleb vaadelda juhud, kus n on paaris ja paaritu. Ainus oluliselt erinev moment tekib paaritu n juhul, kui on tarvis näidata aluse Q_n tipust $(0, \dots, 0)$ maksimaalsel kaugusel olevat kihti. Selleks sobib aluse $\psi(Q_n)$ kiht number $\frac{n+1}{2}$. Paneme tähele, et graafi $P_\psi(Q_n)$ korral kirjeldavad servi mööda liikumised tippudele vastavate kahendvektorite muutusi kas ühe koordinaadi kaupa või kõigi koordinaatide kaupa korraga. Iseloomustades kahendvektorit jälle tema 0de ja 1de arvu erinevuse kaudu, ei muuda kõigi koordinaatide vahetus seda suurust. Seega sattumaks tipust $(0, \dots, 0)$ kihti number $\frac{n+1}{2}$, tuleb teha vähemalt $\frac{n-1}{2}$ esimest tüüpi sammu. Sattumaks alusesse $\psi(Q_n)$, tuleb teha veel üks samm, kokku seega vähemalt $\frac{n+1}{2}$ sammu. Jääb vaid tähele panna, et $\frac{n-1}{2}$ esimest tüüpi sammu ja ühe alustevahelise sammuga ei ole võimalik aluse Q_n tipust $(0, \dots, 0)$ jõuda aluse $\psi(Q_n)$ kihti number $\frac{n+1}{2}$. Seega $d(P_\psi(Q_n)) \geq \frac{n+3}{2}$, kui n on paaritu. Võrdus selles võrratuses ja juht, kus n on paaris, tõestatakse analoogiliselt Lausega 4.2.

Q.E.D.

See konstruktsioon on mitmes mõttes parem kui eelpooltoodud konstruktsioon graafide $P_\phi(Q_n)$. Kõigepealt, teda sai üldistada ka juhule, kus n on paaritu või $n = 2$, lisaks ei tulnud diameetri korral erandit $n = 4$. Samas, kuna graaf $P_\phi(Q_n)$ konstrueeriti lähtudes väiksemast rühmast, teame me vähem tema automorfismide kohta. Kuid, nagu samuti näha sellest näitest, ei olegi liiga paljude automorfismide vaatlemine alati hea – võib osutada, et terve automorfismirühma suhtes vaadelduna ei saa me antud TT-graafist soovitud diameetrivõiduga permutatsioonigraafi.

5 Graafid $Q_{m,n}$

Graafid Q_n on graafiteoorias põhjalikult uuritud ja omavad tänu suurele sümmeetrilisusele palju häid omadusi. Intuitiivselt peaks enamik neid omadusi säilima, kui asendada graafi Q_n definitsioonis rühm \mathbb{Z}_2 mõne teise tsükililise rühmaga \mathbb{Z}_m . Käesolev peatükk käsitlebki nii tekkivaid graafe eelmise peatüki tulemuste kontekstis.

Definitsioon 5.1 *Graaf $Q_{m,n}$, $m \geq 2$, $n \geq 1$ on graaf tipuhulgaga*

$$V(Q_n) = (\mathbb{Z}_m)^n$$

ja servahulgaga

$$E(Q_n) = \{((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \mid \exists! i a_i \neq b_i\}.$$

Lemma 5.1 *Graafid $Q_{m,n}$ ja $(K_m)^n$ on isomorfsed.*

Tõestus. Kasutame induktsiooni n järgi.

Kui $n = 1$, siis ilmselt $Q_{m,1} \simeq K_m$, kui võrd definitsiooni põhjal on graafil $Q_{m,1}$ m tippu, mis kõik on omavahel servaga ühendatud. Olgu $\mu : V(Q_{m,1}) \rightarrow V(K_m)$ nende graafide isomorfismi teostav kujutus (sisuliselt suvaline bijektsioon tipuhulkade vahel).

Eeldame nüüd, et mingi täisarvu $k \geq 1$ jaoks on $Q_{m,k} \simeq (K_m)^k$, nende graafide isomorfismi teostagu kujutus $\varphi : V(Q_{m,k}) \rightarrow V((K_m)^k)$. Veendume, et $Q_{m,k+1} \simeq (K_m)^k \times K_m$, viimane graaf on definitsiooni järgi graaf $(K_m)^{k+1}$.

Sobivaks osutub kujutus

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : V(Q_{m,k+1}) &\rightarrow V((K_m)^k \times K_m) : (a_1, \dots, a_k, a_{k+1}) \mapsto \\ &\mapsto (\varphi(a_1, \dots, a_k), \mu(a_{k+1})). \end{aligned}$$

Ilmselt on tegu bijektsiooniga. Kontrollimaks, et kujutus $\bar{\varphi}$ säilitab ka servad, vaatleme serva $((a_1, \dots, a_{k+1}), (b_1, \dots, b_{k+1})) \in E(Q_{m,k+1})$. Vastavalt graafi $Q_{m,k+1}$ servahulga definitsioonile, peab leiduma täpselt üks täisarv $i \in [1, \dots, k+1]$ selline, et $a_i \neq b_i$.

Kui $1 \leq i \leq k$, siis $(\varphi(a_1, \dots, a_k), \varphi(b_1, \dots, b_k)) \in E((K_m)^k)$ ja $\mu(a_{k+1}) = \mu(b_{k+1})$ (sest $a_{k+1} = b_{k+1}$). Graafide otsekorrutise definitsiooni põhjal siis

$$(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}) \mapsto (\varphi(a_1, \dots, a_k), \mu(a_{k+1})) \in E((K_m)^k \times K_m).$$

Kui $i = k + 1$, siis $\varphi(a_1, \dots, a_k) = \varphi(b_1, \dots, b_k)$ (sest algsed vektorid on võrdsed) ja $\mu(a_{k+1}) \neq \mu(b_{k+1})$ (sest $a_{k+1} \neq b_{k+1}$ ja μ on injektiivne), järelikult $(\mu(a_{k+1}), \mu(b_{k+1})) \in E(K_m)$. Seega jällegi graafide otsekorrutise definitsiooni põhjal

$$(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}) \mapsto (\varphi(a_1, \dots, a_k), \mu(a_{k+1})) \in E((K_m)^k \times K_m).$$

Analoogiliselt tõestatakse, et kujutuse $\overline{\varphi}$ pöördkujutus säilitab graafi servad.

Q.E.D.

Graafid Q_n on graafide $Q_{m,n}$ erijuhuks $Q_{2,n}$. Järgnevas uurime, mil määral saab graafidele $Q_{m,n}$ eelmise peatüki tulemusi üle kanda.

Alustame väitest

Lemma 5.2 *Olgu $u_1, v_1, u_2, v_2 \in V(Q_{m,n})$. Kui $d(u_1, v_1) = d(u_2, v_2)$, siis leidub selline $\varphi \in \text{Aut}(Q_{m,n})$, et $\varphi(u_1) = u_2$ ja $\varphi(v_1) = v_2$.*

Tõestus. Paneme tähele, et kujutused

$$\gamma : (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \mapsto (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + 1, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

või üldisemalt, kujutused

$$\delta : (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \mapsto (a_1, \dots, a_{i-1}, \sigma(a_i), a_{i+1}, \dots, a_n),$$

kus σ on hulga \mathbb{Z}_m suvaline permutatsioon ja $i = 1, \dots, n$, on graafi $Q_{m,n}$ automorfismid. Tõepoolest, graafide $Q_{m,n}$ servahulga definitsioonis oli oluline vaid see, millistel positsioonidel tippudele vastavad vektorid erinevad. Et kujutused γ ja δ ilmselt säilitavad selle omaduse, säilitavad nad ka graafi $Q_{m,n}$ servahulga.

Kujutuste γ kompositsioonina saab anda graafi $Q_{m,n}$ automorfismid γ_1 ja γ_2 , mis töötavad järgmiselt:

$$\begin{aligned} \gamma_1 : (u_1, v_1) &\mapsto (\underline{0}, v_1 - u_1), \\ \gamma_2 : (u_2, v_2) &\mapsto (\underline{0}, v_2 - u_2), \end{aligned}$$

kus tippe u_j ja v_j käsitleme vektorruumi $(\mathbb{Z}_m)^n$ elementidena, tippu $\underline{0}$ ruumi nullvektorina ning $d(a, b)$ märgib vektorite a ja b Hammingi kaugust ehk lihtsalt erinevate komponentide arvu. Tähistades $w(a)$ vektori a nullist erinevate komponentide arvu, on selge, et $w(v_1 - u_1) = w(v_2 - u_2)$. Olgu γ_3

ruumi $(\mathbb{Z}_m)^n$ koordinaatide permutatsioon selline, et vektorite $\gamma_3(v_1 - u_1)$ ja $v_2 - u_2$ mittenullkomponendid on samadel positsioonidel. Juhul $m = 2$ võib siin tõestuse lõpetada ning võtta $\varphi = \gamma_2^{-1}\gamma_3\gamma_1$. Juhul $m > 2$ võib aga juhtuda, et samadel positsioonidel asuvad mittenullkomponendid erinevad. Sel juhul tuleb iga sellise positsiooni jaoks eraldi leida hulga \mathbb{Z}_m permutatsioon σ selline, et $\sigma(0) = 0$ ja vektori $\gamma_3(v_1 - u_1)$ valitud mittenullkomponent kujutub vektori $v_2 - u_2$ vastavaks mittenullkomponendiks. Permutatsioonidele σ vastavate kujutuste δ kompositsioon olgu γ_4 , Lemma sõnastuses väidetud kujutuse φ võib siis anda kujul $\varphi = \gamma_2^{-1}\gamma_4\gamma_3\gamma_1$.

Q.E.D.

Nüüd vaatleme eelmise peatükiga analoogselt rühma $Aut(Q_{m,n})$ poolt indutseeritud toimet graafi $Q_{m,n}$ tipupaaride hulgal. Küsides, kas leidub permutatsiooni $\alpha \notin Aut(Q_{m,n})$, mille korral rühm $Aut(Q_{m,n})$ oleks automorfismirühm ka graafile $\alpha(Q_{m,n})$, tuleb jälle otsida toime seda orbiiti, mille elementide arv langeks kokku elementide arvuga orbiidil laiusega 1.

Leiame elementide arvu orbiidil diameetriga k . Graafi $Q_{m,n}$ kauguste loendaja avaldub kujul

$$de(Q_{m,n}) = de((K_m)^n) = (de(K_m))^n = (1 + (m-1)z)^n,$$

seega on antud tipust kaugusel k olevate tippude arv $\binom{n}{k}(m-1)^k$. Et tippe on kokku m^n tükki, on tipupaare kaugusega k kokku $\frac{\binom{n}{k}(m-1)^k m^n}{2}$. Saame võrrandi

$$\begin{aligned} \frac{\binom{n}{1}(m-1)^1 m^n}{2} &= \frac{\binom{n}{k}(m-1)^k m^n}{2} \\ n(m-1) &= \binom{n}{k}(m-1)^k \\ n &= \binom{n}{k}(m-1)^{k-1} \end{aligned}$$

Juhtu $m = 2$ käsitleti eelmises peatükis. Seega võib eeldada $m \geq 3$, samuti $k > 1$. Ülal leitud kaalude loendajast on näha, et graafi $Q_{m,n}$ diamaater on n , järelikult on mõtet vaadelda vaid olukorda $k \leq n$.

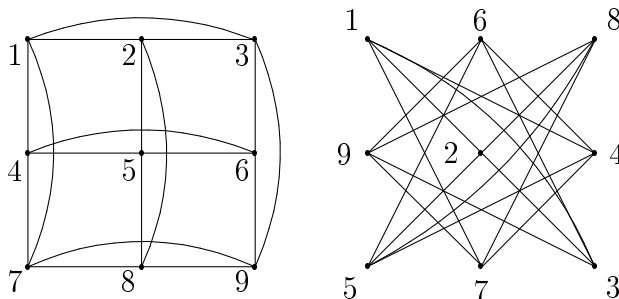
Kui $k < n$, siis $\binom{n}{k} \geq n$ ja $(m-1)^{k-1} \geq 2$, seega $\binom{n}{k}(m-1)^{k-1} > n$. Järelikult tuleb saadud võrrandi rahuldamiseks võtta $k = n$. Võrrand

omandab siis kuju

$$n = (m - 1)^{n-1}.$$

Kui $n \geq 3$, saame $(m - 1)^{n-1} \geq 2^{n-1} > n$, seega jääb järele vaid juht $n = 2$, kust saame $m = 3$.

Niisiis, kui $m \geq 3$ jaoks leidub graaf $Q_{m,n}$ ja ülalkirjeldatud omadustega permutatsioon α , siis saab see graaf olla vaid $Q_{3,2}$. Osutub, et graafi $Q_{3,2}$ korral saab permutatsiooni α tõesti leida. Eespool tehtu põhjal on selge, et tasub proovida ainult permutatsiooni, mis vahetab orbiidid diameetritega 1 ja 2; et saadavad graafid on isomorfsed, nähtub jooniselt 6.



Joonis 6: Graaf $Q_{3,2}$

Tegelikult kuulub ka graaf $Q_{3,2}$ suuremasse perre – kõigi graafide $(C_m)^n$ jaoks saab leida vajalike omadustega permutatsiooni α , nagu tõestatud töös [3].

Inspireerituna eelmisest peatükist tekib loomulik küsimus – kui vaadeldes kogu automorfismirühma ei õnnestunud leida sobivat permutatsiooni α , siis äkki annab tulemusi mõne väiksema rühma vaatlemine. Tõepoolest, eelmises peatükis antud graafide Q_n'' konstruktsiooni saab väga lihtsalt üle kanda ka praegusele juhule.

Definitsioon 5.2 Graafiks $Q_{m,n}''$ nimetame graafi tipuhulgaga

$$V(Q_{m,n}'') = (\mathbb{Z}_m)^n$$

ja servahulgaga

$$E(Q_{m,n}'') = \{((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \mid a_n = b_n \text{ \& \}$$

$$\begin{aligned} & \& d((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = 1 \} \cup \\ & \cup \{ ((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \mid \exists k \in \mathbb{Z}_m \setminus \{0\} \\ & (b_1, \dots, b_n) = (a_1, \dots, a_n) + k(1, \dots, 1) \}. \end{aligned}$$

Eelmise peatükiga analoogselt tõestatakse, et $Q_{m,n} \simeq Q''_{m,n}$. Isomorfismi teostatav kujutus ψ näeb formaalselt samasugune välja:

$$\psi : (a_1, \dots, a_n) \mapsto (a_1 + a_n, a_2 + a_n, \dots, a_{n-1} + a_n, a_n),$$

ainult et nüüd on ψ üldiselt m . järku teisendus. Samuti on lihtne näha, et kõik teisendused

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \dots, a_n) &\mapsto (a_1 + 1, a_2, \dots, a_n), \\ (a_1, a_2, \dots, a_n) &\mapsto (a_1, a_2 + 1, \dots, a_n), \\ &\dots \\ (a_1, a_2, \dots, a_n) &\mapsto (a_1, a_2, \dots, a_n + 1) \end{aligned}$$

on nii graafi $Q_{m,n}$ kui graafi $Q''_{m,n}$ automorfismid, kusjuures moodustavad automorfismirühma transitiivse alamrühma.

Seega on diameetrivõitu andva permutatsioonigraafi moodustamiseks vajalikud tingimused täidetud, ainus probleem on, et $\psi^2 \notin \text{Aut}(Q_{m,n})$. Selle probleemi lahendab punkt 3.3, kus üldistasime kahel alusel töötava permutatsioonigraafi mõiste suvalise arvu alustega töötavale permutatsioonkorru-tisele.

6 Graafid Q_n^M

6.1 Definiitsioon ja omadused

Peatükis 4 vaatlesime graafi Q_n'' , mille tipuhulgaks oli

$$V(Q_n'') = (\mathbb{Z}_2)^n$$

ja servahulgaks

$$\begin{aligned} E(Q_n'') = & \{((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \mid a_n = b_n \& \\ & \& d((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = 1\} \cup \\ & \cup \{((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \mid \\ & d((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = n\}. \end{aligned}$$

Paneme tähele, et sama graafi servahulka võib defineerida ka teistmoodi. Nimelt on graafi Q_n'' iga tipp ühendatud parajasti kõigi tippudega, mis erinevad esialgselt tippust vektorite

$$\begin{aligned} & (1, 0, 0, \dots, 0, 0) \\ & (0, 1, 0, \dots, 0, 0) \\ & (0, 0, 1, \dots, 0, 0) \\ & \dots \\ & (0, 0, 0, \dots, 1, 0) \\ & (1, 1, 1, \dots, 1, 1) \end{aligned}$$

võrra. Defineerides maatriksi

$$M'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

võime kirjutada

$$E(Q_n'') = \{(\bar{a}, \bar{b}) \mid \bar{b} - \bar{a} \text{ on maatriksi } M'' \text{ rida}\},$$

kus $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ja $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Üldistusena saame järgmise definitsiooni.

Definitsioon 6.1 Olgu M $n \times n$ matriks üle ringi \mathbb{Z}_2 . Graafiks Q_n^M nimetame graafi tipuhulgaga

$$V(Q_n^M) = (\mathbb{Z}_2)^n$$

ja servahulgaga

$$E(Q_n^M) = \{(\bar{a}, \bar{b}) \mid \bar{b} - \bar{a} \text{ on matriksi } M \text{ rida}\}.$$

Peatüki 4 anti graaf Q_n'' graafi Q_n kaudu, kasutades selleks teisendust

$$\psi : (a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto (a_1 + a_n, a_2 + a_n, \dots, a_{n-1} + a_n, a_n).$$

Kasutades matriksit M'' saame

$$\psi(\bar{a}) = \bar{a}M''.$$

Siit saame järgmise definitsiooni.

Definitsioon 6.2 Olgu antud graaf G tipuhulgaga $V(G) = (\mathbb{Z}_2)^n$ ning suvaline matriks M elementidega ringist \mathbb{Z}_2 . Graafiks $(G)^M$ nimetame graafi tipuhulgaga

$$V((G)^M) = (\mathbb{Z}_2)^n$$

ja servahulgaga

$$E((G)^M) = \{(\bar{a}M + \bar{s}, \bar{b}M + \bar{s}) \mid (\bar{a}, \bar{b}) \in E(G), \bar{s} \in (\mathbb{Z}_2)^n\}.$$

Liidetav \bar{s} on vajalik olukorras, kus kujutus

$$\bar{a} \mapsto \bar{a}M$$

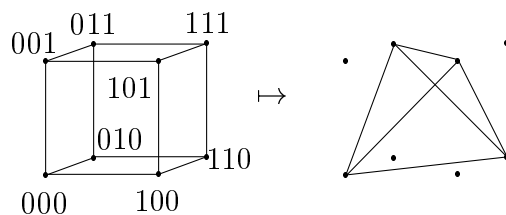
ei osutu isomorfismiks. Vaatleme näiteks graafi $G = Q_3$ ja matriksit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

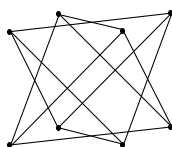
4. peatüki tähistes oleks tegu graafiga Q_3' , kuid võttes definitsiooni 6.2 ilma liidetavata \bar{s} saaksime vaid joonisel 7 näidatud graafi.

Nüüd aga on graaf $(Q_3)^M$ nagu näidatud joonisel 8.

Järgnevalt tõestame loomuliku vastavuse käesoleva peatüki kahe definitsiooni vahel.



Joonis 7: Graaf $(Q_3)^M$ definitsioonil ilma liidetavata \bar{s}



Joonis 8: Graaf $(Q_3)^M$ definitsioonil liidetavaga \bar{s}

Lemma 6.1 Olgu M $n \times n$ matriks üle ringi \mathbb{Z}_2 . Siis

$$Q_n^M = (Q_n)^M.$$

Tõestus. Olgu $(\bar{a}, \bar{b}) \in E(Q_n^M)$. Siis vektor $\bar{b} - \bar{a}$ on matriksi M reaks. Tõestamaks, et $(\bar{a}, \bar{b}) \in E((Q_n)^M)$, tuleb leida vektorid \bar{a}_1, \bar{b}_1 ja \bar{s} nii, et $(\bar{a}_1, \bar{b}_1) \in E(Q_n)$ ning

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \bar{a}_1 M + \bar{s}, \\ \bar{b} &= \bar{b}_1 M + \bar{s}. \end{aligned}$$

Oletame, et vektor $\bar{b} - \bar{a}$ on matriksi M i . rida. Siis valime vektorid \bar{a}_1 ja \bar{b}_1 nii, et $\bar{b}_1 - \bar{a}_1 = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, kusjuures viimase vektori ainus mitterullelement 1 asub i . positsioonil. Vastavalt graafi Q_n definitsioonile siis $(\bar{a}_1, \bar{b}_1) \in E(Q_n)$. Jääb valida

$$\bar{s} = \bar{a} - \bar{a}_1 M.$$

Kontrollime, et

$$\bar{a} - \bar{a}_1 M = \bar{b} - \bar{b}_1 M.$$

Viimane võrdus aga kehtib, sest

$$\bar{b} - \bar{a} = (\bar{b}_1 - \bar{a}_1) M = \bar{b}_1 M - \bar{a}_1 M.$$

Olgu nüüd $(\bar{a}, \bar{b}) \in E((Q_n)^M)$, st $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}_1 M + \bar{s}, \bar{b}_1 M + \bar{s})$, kus $(\bar{a}_1, \bar{b}_1) \in E(Q_n)$. Tõestamaks, et $(\bar{a}, \bar{b}) \in E(Q_n^M)$, tuleb veenduda, et vektor $\bar{b} - \bar{a}$ on matriksi M rida. See aga on nii, sest

$$\bar{b} - \bar{a} = (\bar{b}_1 - \bar{a}_1)M$$

ning vektorid \bar{a}_1 ja \bar{b}_1 erinevad täpselt ühel koordinaadil.

Q.E.D.

Niisiis osutusid kaks definitsiooni kuupgraafi “astendamiseks” matriksi-ga samaväärseteks. Ilmneb aga, et see “astendamine” käitub loomulikult ka matriksite korrutamise suhtes, nimelt kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 6.2 *Olgu M_1 ja M_2 $n \times n$ matriksid üle ringi \mathbb{Z}_2 . Siis*

$$(Q_n^{M_1})^{M_2} = Q_n^{M_1 M_2}.$$

Tõestus. Mõlema graafi tipuhulgaks on $(\mathbb{Z}_2)^n$, seega jääb kontrollida vaid servahulkade võrdsus.

$$\begin{aligned} E((Q_n^{M_1})^{M_2}) &= \\ &= \{(\bar{a}M_2 + \bar{s}, \bar{b}M_2 + \bar{s}) \mid (\bar{a}, \bar{b}) \in E(Q_n^{M_1}), \bar{s} \in (\mathbb{Z}_2)^n\} = \\ &= \{(\bar{a}M_2 + \bar{s}, \bar{b}M_2 + \bar{s}) \mid \bar{b} - \bar{a} \text{ on matriksi } M_1 \text{ rida, } \bar{s} \in (\mathbb{Z}_2)^n\}. \end{aligned}$$

Tõestuse lõpuleviimiseks piisab veenduda, et vektor

$$(\bar{b}M_2 + \bar{s}) - (\bar{a}M_2 + \bar{s}) = (\bar{b} - \bar{a})M_2$$

on matriksi $M_1 M_2$ rida ning et sellisel kujul esituvad matriksi $M_1 M_2$ kõik read. Esimene neist väidetest nähtub asjaolust, et vektor $\bar{b} - \bar{a}$ on matriksi M_1 rida, mistõttu $(\bar{b} - \bar{a})M_2$ on matriksi $M_1 M_2$ reaks.

Teisalt, olgu matriksi $M_1 M_2$ i . reaks vektor \bar{r} . Valime suvalised vektorid \bar{a} ja \bar{b} nii, et vektor $\bar{b} - \bar{a}$ oleks matriksi M_1 i . reaks. Siis on ilmselt rahuldatud ka seos

$$\bar{r} = (\bar{b} - \bar{a})M_2.$$

Jääb vaid fikseerida $\bar{s} = \bar{0}$.

Q.E.D.

Vaadeldes antud konstruktsiooni permutatsioonigraafide kontekstis, mängib matriks M sisuliselt permutatsiooni α rolli 3. peatükist. Samas peatükis

nägime, et oluliseks tingimuseks permutatsioonigraafi konstruktsiooni edukaks läbiviimiseks oli loodava graafi $P_\alpha(G)$ aluste isomorfsus. 3. peatükis oli see tingimus triviaalselt täidetud, praegu aga ei pea graafid Q_n ja Q_n^M sugugi isomorfsed olema. Seega on tarvis vastavat tingimust, mille saamegi järgmisest teoreemist.

Teoreem 6.3 *Graafid Q_n ja $(Q_n)^M$ on isomorfsed parajasti siis, kui maatriks M on regulaarne.*

Tõestus. Olgu maatriks M regulaarne. Et $V(Q_n) = V(Q_n^M) = (\mathbb{Z}_2)^n$, tuleb näidata kujutus $\psi : (\mathbb{Z}_2)^n \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^n$, mis realiseerib antud graafide servahulka vastavuse. Sobivaks kujutuseks on

$$\psi : V(Q_n) \rightarrow V(Q_n^M) : \bar{a} \mapsto \bar{a}M.$$

Kui $(\bar{a}, \bar{b}) \in E(Q_n)$, siis hulga $E((Q_n)^M)$ definitsiooni kohaselt $(\psi(\bar{a}), \psi(\bar{b})) \in E((Q_n)^M)$.

Olgu nüüd $(\bar{a}_1, \bar{b}_1) \in E((Q_n)^M)$. Tuleb leida vektorid \bar{a} ja \bar{b} , mille korral $\psi(\bar{a}) = \bar{a}_1$ ja $\psi(\bar{b}) = \bar{b}_1$, nii et $(\bar{a}, \bar{b}) \in E(Q_n)$. Võtame

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \bar{a}_1 M^{-1}, \\ \bar{b} &= \bar{b}_1 M^{-1}. \end{aligned}$$

Jääb kontrollida tingimus $(\bar{a}, \bar{b}) \in E(Q_n)$. Piisab näidata, et vektor $\bar{b} - \bar{a}$ sisaldab täpselt ühe mittenullkomponendi. Et

$$\bar{b} - \bar{a} = (\bar{b}_1 - \bar{a}_1)M^{-1}$$

Ning vektor $\bar{b}_1 - \bar{a}_1$ on maatriksi M reaks, saame viimasest avaldisest ilmselt ühikmaatriksi rea, nagu oligi tarvis.

Oletame nüüd, et maatriks M pole regulaarne. Tõestame, et sel juhul pole graaf $(Q_n)^M$ sidus ega või järelikult olla isomorfne graafiga Q_n .

Vaatleme teisendust

$$\phi : (\mathbb{Z}_2)^n \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^n : \bar{a} \mapsto \bar{a}M.$$

Kuna maatriks M pole regulaarne, annab $\phi(\mathbb{Z}_2^n)$ pärisalamrühma Abeli rühmas \mathbb{Z}_2^n . Kujutus

$$\phi_{\bar{s}} : \bar{a} \mapsto \bar{a}M + \bar{s}$$

määrab selle pärisalamrühma kõrvalklassi, kusjuures vektori \bar{s} erinevate väärtuste korral vastavad kõrvalklassid kas ühtivad või ei löiku. Graafis $(Q_n)^M = Q_n^M$ on kahe tipu vahel serv parajasti siis, kui ühele tipule vastavast vektorist saab teisele tipule vastava vektori maatriksi M rida liites. See operatsioon ei vii aga vaadeldavatest kõrvalklassidest välja. Järelikult pole graaf $(Q_n)^M$ sidus ega isomorfne graafiga Q_n .

Q.E.D.

6.2 Graafid $Q_{m,n}^M$

Eelnevas punktis kasutasime me korpuse \mathbb{Z}_2 omadustest vaid ringi omadusi. Seega peaks ilma suuremate probleemideta olema võimalik asendada ring \mathbb{Z}_2 suvalise ringiga \mathbb{Z}_m . Käesolevas punktis veendume, et see on tõesti nii, kui vaid põhidefinitsiooni sobivalt täiendada.

Definitsioon 6.3 *Olgu M $n \times n$ maatriks üle ringi \mathbb{Z}_m . Graafiks $Q_{m,n}^M$ nimetame graafi tipuhulgaga*

$$V(Q_{m,n}^M) = (\mathbb{Z}_m)^n$$

ja servahulgaga

$$E(Q_{m,n}^M) = \{(\bar{a}, \bar{b}) \mid \bar{b} - \bar{a} = k \cdot \bar{c}, \bar{c} \text{ on maatriksi } M \text{ rida, } k \in \mathbb{Z}_m \setminus \{0\}\}.$$

Ka graafi “astendamise” definitsioon maatriksiga on sarnane eelmises punktis toodule.

Definitsioon 6.4 *Olgu antud graaf G tipuhulgaga $V(G) = (\mathbb{Z}_m)^n$ ning $n \times n$ maatriks M elementidega ringist \mathbb{Z}_m . Graafiks $(G)^M$ nimetame graafi tipuhulgaga*

$$V((G)^M) = (\mathbb{Z}_m)^n$$

ja servahulgaga

$$E((G)^M) = \{(\bar{a}M + \bar{s}, \bar{b}M + \bar{s}) \mid (\bar{a}, \bar{b}) \in E(G), \bar{s} \in (\mathbb{Z}_m)^n\}.$$

Üle saab kanda kõik eelmise punkti tulemused.

Lemma 6.4 Olgu M $n \times n$ maatriks üle ringi \mathbb{Z}_m . Siis

$$Q_{m,n}^M = (Q_{m,n})^M.$$

Teoreem 6.5 Olgu M_1 ja M_2 $n \times n$ maatriksid üle ringi \mathbb{Z}_m . Siis

$$(Q_{m,n}^{M_1})^{M_2} = Q_{m,n}^{M_1 M_2}.$$

Teoreem 6.6 Graafid $Q_{m,n}$ ja $(Q_{m,n})^M$ on isomorfsed parajasti siis, kui maatriks M on regulaarne.

Kõigi nende tulemuste tõestused on sarnased eelmise punkti vastavate tulemuste tõestustega, kui lugeda väljendi “maatriksi M rida” asemel “maatriksi M rea mittenullkordne”.

6.3 Rakendused

Paneme tähele Teoreemi 6.3 ja Teoreemi 4.1 tõestuste ülesehituste sarnasust – mõlemas oli teatav graaf osadel juhtudel isomorfne graafiga Q_n , osadel juhtudel aga mitte, kusjuures mitteisomorfne järeldus vaadeldava graafi mittesidususest. Osutub, et Teoreem 4.1 on Teoreemi 6.3 erijuht.

Peatükis 4 vaadeldud graafi Q'_n defineeriv maatriks on

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ & & & \dots & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tähistagu I n -järku ühikmaatriksit ning J $n \times n$ maatriksit, mille kõik elemendid on võrdsed väärtusega 1 (kõiki maatrikseid vaatleme üle ringi \mathbb{Z}_2). Siis

$$M' = J + I.$$

Teoreemi 6.3 järgi on graaf $Q_n^{M'}$ isomorfne graafiga Q_n parajasti siis, kui maatriks M' on regulaarne. Vaatleme maatriksi M' ruutu:

$$M' M' = (J + I)(J + I) = J^2 + 2J + I^2 = J^2 + I.$$

Lihtne on näha, et

$$J^2 = \begin{cases} O, & \text{kui } n \equiv 0 \pmod{2}, \\ J, & \text{kui } n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

Seega

$$M'M' = \begin{cases} I, & \text{kui } n \equiv 0 \pmod{2}, \\ J + I, & \text{kui } n \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases}$$

järelikult on maatriks M' regulaarne parajasti siis, kui n on paarisarv, olemegi saanud Teoreemi 4.1 väite.

Teise näitena vaatleme veelkord 4. peatükis defineeritud graafe Q_n'' ning käesoleva peatüki alguses toodud vastavat maatriksit M'' . Tänu kolmnurksel kujul esitusele on maatriks M'' automaatselt regulaarne, järelikult $Q_n \simeq Q_n''$ iga n korral, nagu nägime ka peatükis 4.

Vaadeldes permutatsioonigraafi konstruktsiooni, mängib maatriks M permutatsiooni α rolli ning maatriksi järk langeb kokku vastava permutatsiooni järguga. Permutatsioonigraafi $P_\alpha(Q_n)$ alusteks on graafid Q_n ning $\alpha(Q_n) = Q_n^M$. Mõlemal ülalvaadeldud juhul on graafiga Q_n isomorfset graafi andva maatriksi M multiplikatiivne järk 2. Seega osutub graaf $P_\alpha(Q_n)$ peatükis 3 tõestatu põhjal TT-graafiks, kui näitame, et graafidel Q_n ja Q_n^M on sama automorfismirühma transitiivne alamrühm.

Selleks rühmaks sobib

$$H = \{ \phi_{\bar{c}} \mid \phi_{\bar{c}} : (\mathbb{Z}_2)^n \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^n : \bar{a} \mapsto \bar{a} + \bar{c}, \bar{c} \in (\mathbb{Z}_2)^n \}.$$

Kohe on selge, et tegu on rühmaga teiseiduste kompositsiooni suhtes, samuti on ilmne selle rühma transitiivsus hulgal $(\mathbb{Z}_2)^n$. Tõestame, et kõik rühma H elemendid on suvalise maatriksi M korral graafi Q_n^M automorfismid (võttes $M = I$, saame vajaliku väite ka graafi Q_n enda jaoks). Tõepoolest, olgu $\bar{c} \in (\mathbb{Z}_2)^n$ ning $(\bar{a}, \bar{b}) \in E(Q_n^M)$. Viimane tingimus tähendab, et vektor $\bar{b} - \bar{a}$ on maatriksi M rida. Et

$$\phi_{\bar{c}}(\bar{b}) - \phi_{\bar{c}}(\bar{a}) = (\bar{b} + \bar{c}) - (\bar{a} + \bar{c}) = \bar{b} - \bar{a},$$

on ka $(\phi_{\bar{c}}(\bar{b}), \phi_{\bar{c}}(\bar{a})) \in E(Q_n^M)$.

Vastuse küsimusele, mida teha juhul, kui permutatsiooni (maatriksi) järk on suurem kui 2, annab jällegi punkt 3.3 – piisab vaid võtta maatriksi järguga võrdne arv (või selle kordne arv) aluseid.

Permutatsioonigraafide maatriksesituse veel ühe rakendusena võib märkida permutatsioonigraafide diameetri leidmist, nagu tehtud näiteks Lause 4.2 tõestuses. Tõepoolest, mainitud tõestuses osutus oluliseks vaid teadmus, milliste tippudega samast alusest antud tipp ühendatud on. Aluse Q_n jaoks kirjeldavad servi maatriksi I read (kuna ilmselt $Q_n = Q_n^I$), aluse Q_n^M jaoks aga maatriksi M read.

Viited

- [1] G.Chartrand, F.Harary: *Planar permutation graphs*, Ann. Inst. Henri Poincaré, 4 (1967), pp 433-438
- [2] P.J. Cameron: *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*, Cambridge Univ. Press, 1994
- [3] J. Villemson: *Tippudel transitiivsed permutatsioonigraafid*, bakalaureusetöö, Tartu, 1996
- [4] F.Harary: *Graafiteooria*, "Mir ", Moskva 1973 (vene keeles)
- [5] F.Boesh, R.Tindell: *Circulants and Their Connectivities*, Journal of Graph Theory, Vol 8 (1984), nr 4, pp 487-499

Summary

The study of computer networks and corresponding graph-theoretical notions has to be supported by developing some good constructions as well. *Good* in the sense of this thesis means a collection of requirements, such as reasonably small valency, small diameter and possibility to extend the graph retaining the desired properties. Part of this goal can be achieved demanding vertex-transitivity of the graph, extending the graph can be done by applying the permutation graph construction. The present thesis goes even further: a concrete family of graphs – the cubic graphs Q_n – is specified. Several generalizations are treated and a common view to all of these generalizations – the graphs $Q_{m,n}^M$ – is given. In order to support the main arguments there are some additional concepts defined – distance enumerator and permutation product – having theoretical importance of their own as well.